

Лекция 9_ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабатикалық теориясы

Бұл ЖСТ механикасындағы эволюциялық қозғалысты зерттеу векторлық элементтерді қолдануға, сызықты емес тербеліс теориясының асимптотикалық әдістеріне және адиабаталық инварианттар әдісіне негізделген. Осы орайда, ЖСТ механикасында зерттелініп отырған көптеген есептерді баяу эволюцияланып өзгеретін гамильтондық жүйе деп қарастыруға болады. Былайша айтқанда, ЖСТ механикасының бірқатар есептерін ұйытқыған кеплер есебі ретінде де қарастыруға болады. Оларға арналған Лагранж функциясы

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{\gamma mm_0}{r} + R(\vec{r}, \vec{v}), \quad (1)$$

ал гамильтонианы

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma mm_0}{r} - R(\vec{r}, \vec{p}), \quad (2)$$

мұндағы R - пертурбация функциясы $\sim \frac{1}{c^2}$, $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ - импульс. Денелердің қозғалысы \vec{M} және \vec{A} векторлық элементтермен сипатталады. Осы векторлық элементтердің физикалық сипаттамаларына байланысты қозғалыс теңдеуінің жалпы түрін жаза аламыз

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt} \vec{e}_M + [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \vec{e}_A + [\vec{\Omega} \vec{A}], \quad (4)$$

мұндағы \vec{e}_M и \vec{e}_A - \vec{M} және \vec{A} векторларының бағытын анықтайтын бірлік векторлар. Бұл m сынақ денесінің сыртқы гравитация өрісіндегі жалпы қозғалыс теңдеуіндегі $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдығы белгісіз болып табылады. Оның нақты түрі қарастырылып отырған жүйенің физикалық күйіне байланысты болады

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{M}}, \quad (5)$$

мұндағы \vec{H} - гамильтонианның кеплерлік қозғалысының орташаланған мәні. Сонымен қатар, гамильтониан \vec{H} векторлық элемент \vec{M} нің функциясы және жүйенің адиабаттық инварианты

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}, \alpha = \gamma m m_0. \quad (6)$$

Бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$ анықтау (3) және (4) қозғалыс теңдеулерін шешпей ақ көптеген белгілі релятивтік эффектерді есептеуге мүмкіндік береді. (6) түріндегі инвариант (3) және (4) теңдеулерге келесідегідей түр береді

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt} \vec{e}_M + [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad (7)$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{e}_A]. \quad (8)$$

(7), (5) теңдеулері және (5) қатынасы ЖСТ механикасы есептерін зерттеуге бағытталған ЖСТ механикасының денелер қозғалысының адиабаттық теориясы деп аталатын математикалық негізі болып табылады. Басқаша айтқанда, бұл теңдеулер және (5) өрнегі толығымен квазикеплер есебінің эволюциялық қозғалыс мәселесін толық шеше алады.

Шварцшильд есебінде, мысалы, ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясы тұрғысынан қарапайым қозғалыс теңдеулері орындалады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{A}], \quad (19)$$

мұндағы Гамильтонның орташа мәні

$$\bar{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0} \xi_0 \right) \frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M c^2}. \quad (20)$$

Бұрыштық жылдамдықтың өрнегін еске салайық

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2} \vec{M} = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2 T c^2} \vec{e}_M \quad (21)$$

және T периоды бойынша перигелийдің ығысуы

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2 c^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}. \quad (22)$$

Біз тағы да әйгілі Эйнштейн формуласын алдық. Мұнда \vec{M} вектор элементіне қатысты \bar{H} туындысын алдық. Бұдан Шварцшильд есебінде перигелиондық айнарудың әсері Гамильтонда \vec{M} орбиталық моментке тәуелділіктің пайда болуымен байланысты екені анық болады. Классикалық механикада, яғни, Кеплер мәселесінде мұндай тәуелділік жоқ және перигелий қозғалыссыз қалады. Кеплер есебі жағдайында Гамильтон тек жүйенің тек M_0 инвариантына тәуелді және егер туынды алатын болсақ,

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial M_0} = \frac{m\alpha^2}{M_0^3} = \frac{2\pi}{T}, \quad (23)$$

Яғни, орташа қозғалыс деп аталады.

Қолданылған әдебиет

1. Абдильдин М. М. Проблема движения тел в общей теории относительности // – Алматы: Изд-во «Қазақ университеті», 2006. – 132 с.